

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Ποιοι είναι οι ορισμοί των δυνάμεων πραγματικών αριθμών και ποιες είναι οι άμεσες συνέπειες αυτών ;

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό a και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $n \geq 2$ συμβολίζεται με a^n και είναι το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a . Δηλαδή

Π.χ. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ και $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων ;

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

$$a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu + \nu}$$

$$a^\mu : a^\nu = a^{\mu - \nu}$$

$$(a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu}$$

$$(a\beta)^\nu = a^\nu \cdot \beta^\nu$$

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu}$$

3. Ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων ;

Προτεραιότητα πράξεων :

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
 - Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
 - Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

4. Τι καλείται τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού x και ποιες είναι οι άμεσες συνέπειες του ορισμού ;

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με \sqrt{x} και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x .

Π.χ. $\sqrt{25}=5$, αφού $5^2=25$ Όμως και $(-5)^2=25$,

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνο του να είναι αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $(3)^2=9$ δηλαδή $(-3)^2=9$ Γενικά : **αν $x \geq 0$ τότε**

$$(\sqrt{x^2})=x$$

5. Τι καλείται αριθμητική παράσταση ; Τι καλείται αλγεβρική παράσταση; Τι καλείται ακέραια παράσταση και τι καλείται αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης ;

Οι εκφράσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς και πράξεις μεταξύ τους ονομάζονται **αριθμητικές παραστάσεις**.

Π.χ. $6 \cdot 5 + 2 \cdot 8$ ή $2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 8$ Οι εκφράσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

Π.χ. $2x^2 + 5$ Ειδικότερα μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

Π.χ. $2x^2 + x y$ Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

Π.χ. η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2x^2 + x y$ για $x=5$ και $y=8$, είναι $2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 8 = 90$.

6. Τι καλείται μονώνυμο ; Τι καλείται συντελεστής μονωνύμου ; Τι καλείται κύριο μέρος μονωνύμου και τι γνωρίζεται για τον βαθμό ενός μονωνύμου ;

Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**. Π.χ. $4x$, $3x^2\psi$. Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου, π.χ. $3x^2\psi$ Το 3 είναι ο συντελεστής του μονωνύμου το $x^2\psi$ είναι το κύριο μέρος του μονωνύμου. Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο **βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του

Π.χ. το μονώνυμο $3x^2\psi$ είναι : 2ου βαθμού ως προς x 1ου βαθμού ως προς ψ και 3ου βαθμού ως προς x και ψ .

7. Ποια μονώνυμα καλούνται όμοια ; Ποια μονώνυμα καλούνται ίσα ; Ποια αντίθετα ; Ποια σταθερά ; Ποιο μηδενικό και τι βαθμού είναι το μηδενικό μονώνυμο ;

Όμοια μονώνυμα καλούνται εκείνα τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

π. χ Τα **όμοια** μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**. Για παράδειγμα τα μονώνυμα $2x^3y$ και $-2x^3y$ είναι αντίθετα. Συμφωνούμε ακόμη να θεωρούνται και οι αριθμοί ως μονώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά** μονώνυμα. Ειδικότερα, ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 είναι σταθερό μονώνυμο μηδενικού βαθμού.

8. Τι καλείται πολυώνυμο ; Τι καλείται όρος πολυωνύμου; Τι καλείται διώνυμο και τι τριώνυμο ; Τι καλείται βαθμός ενός πολυωνύμου; Τι καλείται σταθερό πολυώνυμο ; Τι καλείται μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός του;

Το άθροισμα μονωνύμων στο οποίο δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, δεν είναι μονώνυμο αλλά μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**. π.χ. $3x^2\psi + 2x\psi^4 - 5x^3\psi^3$ Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου. π.χ. το πολυώνυμο $3x^2\psi + 2x\psi^4 - 5x^3\psi^3$ έχει 3 όρους τα μονώνυμα $3x^2\psi, 2x\psi^4, -5x^3\psi^3$. Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται **διώνυμο**, αν έχει δύο όρους **τριώνυμο**, αν έχει τρεις όρους. **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Το πολυώνυμο $3x^2\psi + 2x\psi^4 - 5x^3\psi^3$ είναι : 3ου βαθμού ως προς x 4ου βαθμού ως προς ψ 6ου βαθμού ως προς x και ψ .

Συμφωνούμε, ακόμα, ότι κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό** πολυώνυμο. Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

9. . Πότε δύο πολυώνυμα είναι ίσα και τι καλείται αναγωγή ομοίων όρων;

Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα. Τα πολυώνυμα $3x^2 - 5x + 1$ και $ax^2 + \beta x + 1$ είναι ίσα, αν $a=3$ και $\beta=-5$. Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, ή όπως λέμε όμοιοι όροι, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**

10. Πως γράφονται και πως συμβολίζονται τα πολυώνυμα και πως συμβολίζεται η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου ;

Το πολυώνυμο $-3x + 2x^2 + 5$ έχει μία μεταβλητή την x και για συντομία συμβολίζεται $P(x)$ ή $Q(x)$ ή $A(x)$ κ.τ.λ. Το πολυώνυμο $P(x) = -3x + 2x^2 + 5$ είναι δευτέρου βαθμού και μπορούμε να το γράψουμε έτσι, ώστε κάθε όρος του να είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον επόμενο του. Δηλαδή, $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Τότε, λέμε, ότι γράφουμε το πολυώνυμο κατά τις **φθίνουσες δυνάμεις του x** . Η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x)$ για $x = 5$, συμβολίζεται με $P(5)$ και είναι: $P(5) = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 5 = 50 - 15 + 5 = 40$

11. Τι καλείται ταυτότητα ; Ποιες είναι και πως ονομάζονται οι αξιοσημείωτες ταυτότητες ;

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Ταυτότητες υπάρχουν πολλές, ορισμένες από αυτές τις συναντάμε πολύ συχνά και γι' αυτό αξίζει να τις θυμόμαστε.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

α) Τετράγωνο αθροίσματος $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

β) Τετράγωνο διαφοράς $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) Κύβος αθροίσματος $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

δ) Κύβος διαφοράς $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

ε) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

12. Να αναφέρετε και να αποδείξετε τις ταυτότητες ;

α) Τετράγωνο αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

β) Τετράγωνο διαφοράς $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) Κύβος αθροίσματος $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

δ) Κύβος διαφοράς $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη

$$(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

ε) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

13. Τι καλείται παραγοντοποίηση ; Πότε μια παράσταση λέμε ότι έχει αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ;

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**. Για παράδειγμα, η παράσταση $\pi R^2 - \pi r^2$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται $\pi(R^2 - r^2)$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $(R + r)(R - r) = R^2 - r^2$, παραγοντοποιείται ως εξής: $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$. Κανένας από τους παράγοντες π , $(R + r)$, $(R - r)$ δεν μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο απλούστερων

παραγόντων, γι' αυτό λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Στο εξής, όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μία παράσταση, θα εννοούμε ότι την αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

14. Πως λύνεται η εξίσωση $ax+\beta=0$;

Η εξίσωση $ax+\beta=0$ λύνεται ως εξής :

• Αν $\alpha \neq 0$, τότε; η εξίσωση $ax + \beta = 0$

έχει μοναδική λύση την

• Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ γράφεται $0x = -\beta$ και αν $-\beta \neq 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη), ενώ - αν $\beta = 0$, κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα ή αόριστη)

15. Πως επιλύουμε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ;

Α) Η επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού γίνεται με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι: Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Β) Πως επιλύουμε τη εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$;

Για να λύσουμε π.χ. την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής: **Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.**

$x^2 - 3x = 0$ Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων. $x(x - 3) = 0$

Για να είναι το γινόμενο $x(x - 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις,

τις $x = 0$ και $x = 3$

Γ) Πως επιλύουμε τη εξίσωση της μορφής

$ax^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$;

Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = \alpha$ έχει δύο λύσεις, $x_1 = +\sqrt{\alpha}$ και

$x_2 = -\sqrt{\alpha}$

π.χ. $x^2 - 9 = 0$

$x^2 - 3^2 = 0$ $(x - 3)(x + 3) = 0$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = 3$ ή $x = -3$

Δ) Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε

ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -16 .

• **Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = \alpha$ δεν έχει λύση (αδύνατη)**

Ε) **Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$.** Η λύση αυτή λέγεται διπλή, γιατί η εξίσωση $x^2 = 0$ γράφεται $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση) άρα $x=0$

16. . Πως γίνεται η επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου και ποιος είναι ο τύπος αυτός ;

Η παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεων της. Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ , δηλαδή **$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.**

Αν $\Delta > 0$, έχει δύο άνισες λύσεις τις

Αν $\Delta = 0$, έχει μία διπλή λύση την

Αν $\Delta < 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη).

17. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $ax^2+bx+c=0$ με $a \neq 0$;

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$, τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο $ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $15 \chi \psi^2 - 8 \chi \psi^2 =$

β) $3 \chi \psi + 2 \chi^3 - 4 \chi \psi + \psi^3 + 3 \chi^3 - 2 \psi^3 =$

γ) $25 \chi \psi \zeta^2 - 14 \zeta^2 \chi \psi - 10 \zeta^2 \chi \psi =$

δ) $(-2x^2y^3) : (-4x^{-3}y^{-4}) =$

ε) $(x^{-2}y^2)^2 \cdot (x^{-4}y^3) =$

2. Να γράψετε σε πολυωνυμική μορφή τα πολυώνυμα

α) $P(x) = (x - 1)(x + 2) + x^3 - 5$ και

β) $Q(x) = \alpha x(x - 2) + \beta x^3 + 3x + \gamma$ και να βρείτε τα α, β, γ ώστε

$P(x) = Q(x)$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - x + 1$ και $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Να βρείτε τα πολυώνυμα: α) $K(x) = P(x) - 2Q(x) + 3x - 5$

β) $\Lambda(x) = (P(x) + Q(x))(x - 1) + (P(x) + x)^2$

4. Να κάνετε τις πράξεις :

α) $-\frac{1}{2} \chi^3 \cdot 10 \chi \psi^2 =$

β) $4 \chi \psi^2 \zeta^3 \cdot \frac{3}{2} \chi^3 \psi^4 \zeta^2 =$

γ) $(-3 \chi \psi^2) \cdot (-\frac{4}{5} \chi^3 \cdot \psi^2) \cdot (-5 \chi \psi) =$

δ) $(x^2 - 2)(\chi^3 + 2x^2 - x - 1) - (2x^3 - x) =$

ε) $-2x(3x^2 + 5) - (x - 1)(x + 2)(x + 1) =$

5. Να κάνετε τις πράξεις :

α) $15 \chi^4 \psi^2 : 5 \chi^3 \psi =$

β) $(\chi + 2) \cdot (\chi + 3) - \chi(\chi + 5) - 5 =$

γ) $(\chi - 1) \cdot (\chi + 4) + 6 - \chi(\chi + 3) =$

δ) $(x^2 - 2)(\chi^3 + 2x^2 - x - 1) - (2x^3 - x) =$

ε) $-2x(3x^2 + 5) - (x - 1)(x + 2)(x + 1) =$

6. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $AB = 2x + 1$, $B\Gamma = 3x + 1$ και $A\Gamma = 5x - 2$.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο που δίνει την περίμετρό του.

β) Αν είναι $u = x + 2$ το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση $B\Gamma$, να βρείτε το πολυώνυμο που εκφράζει το εμβαδό του τριγώνου.

14. . Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

α) $x^2 - 8x + 12 =$

β) $x^2 + 5x - 6 =$

γ) $-3y^2 + 12y - 9 =$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3(x + 2) - 3 = 3x + 5$

β) $2(x - 1) - x = x - 2$

γ) $2x^2 = 7x$

δ) $3x^2 - 75 = 0$

ε) $2x^2 + 8 = 0$

16. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$

γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

δ) $x^2(2x - 1) - 6x(2x - 1) + 9(2x - 1) = 0$

ε) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$

17. Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.